TD 2 : Estimation Ponctuelle et Distribution d'Échantillonnage de $\overline{x}$

Exercice 1

Un échantillon de 25 PME du secteur agroalimentaire fournit les marges brutes suivantes (en %) : 12, 15, 11, 14, 13, 16, 12, 14, 15, 13, 11, 14, 12, 15, 13, 14, 16, 12, 13, 15, 14, 11, 13, 14, 12.

1) Calculez l'estimation ponctuelle de la marge moyenne μ et de l'écart-type σ de la population.

2) Quelle est l'erreur type de $\overline{x}$ si la population est considérée comme infinie ?

Solution 1

1) Estimation ponctuelle de la marge moyenne :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{335}{25} = 13.40\,\% \Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = 13.40\,\%}$$

Estimation ponctuelle de l'écart-type de la population :

$$s^2 = \frac{1}{25-1}\sum_{i=1}^{25}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{46}{24} \approx 1.92$$
$$s = \sqrt{1.92} \approx 1.39\,\% \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma} = 1.39\,\%}$$

2) L'erreur type de $\overline{x}$ (population infinie) :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1.39}{\sqrt{25}} = 0.278$$

L'erreur type mesure la dispersion attendue des moyennes d'échantillon autour de μ.

Exercice 2

La société EAI compte $N = 2500$ employés. On sait que $\mu = 51800$ \$ et $\sigma = 4000$ \$ pour le salaire annuel. On prélève un échantillon aléatoire simple de $n = 30$ employés.

1) Quelle est l'espérance mathématique de $\overline{x}$?

2) Calculez l'erreur type de $\overline{x}$ en justifiant l'usage (ou non) du facteur de correction pour population finie.

3) Quelle est la forme approximative de la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$?

Solution 2

1) Espérance mathématique de $\overline{x}$:

$$E(\overline{x}) = \mu = 51800\$$$

2) Erreur type de $\overline{x}$:

$$\frac{n}{N} = \frac{30}{2500} = 0.012 < 0.05$$

Le facteur de correction est négligeable.

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4000}{\sqrt{30}} \approx 730.30\$$$

3) Forme approximative de la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$:
Comme $n = 30 \geq 30$, et en vertu du théorème central limite, la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est approximativement normale :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(51800\,,\,730.30^2)$$

Exercice 3

Un institut de sondage estime que le revenu mensuel moyen des ménages français est $\mu = 2800$ € avec $\sigma = 900$ €. On prélève un échantillon de $n = 100$ ménages.

1) Calculez l'erreur type de $\overline{x}$.

2) Quelle est la probabilité que $\overline{x}$ s'écarte de plus de ± 150 de μ ? (On vous donne $\Phi(1.67) = 0.9525$)

Solution 3

1) Erreur type de $\overline{x}$:
Le nombre de ménages N dans la population française n'est pas fourni. Mais si l'on que $N \geq 2000$, alors le facteur de correction pour taille finie est négligeable puisque :

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{2000} = 0.05$$

Dans ce cas, l'erreur type de $\overline{x}$ est donnée par :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{900}{\sqrt{100}} = 90 \text{ €}$$

2) Probabilité que $\overline{x}$ s'écarte de plus de ± 150 de μ :

$$\begin{aligned}
P(|\overline{x} - \mu| > 150) &= 1 - P(|\overline{x} - \mu| \leq 150) \\
&= 1 - P(-150 \leq \overline{x} - \mu \leq 150) \\
&= 1 - P(-150 + \mu \leq \overline{x} \leq 150 + \mu) \\
&= 1 - P(2650 \leq \overline{x} \leq 2950)
\end{aligned}$$

Comme $n = 100 \geq 30$, et par application du théorème central limite, la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est approximativement normale :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(2800\,,\,90^2)$$

Pour pouvoir utiliser la table de la loi normale, il convient d'abord de centrer et réduire la variable $\overline{x}$ comme suit $(E(\overline{x}) = \mu)$:

$$Z = \frac{\overline{x} - E(\overline{x})}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{\overline{x} - 2800}{90}$$

Les bornes inférieure et supérieure deviennent :

$$z_{\text{inf}} = \frac{2650 - 2800}{90} \approx -1.67 \qquad z_{\text{sup}} = \frac{2950 - 2800}{90} \approx 1.67$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(2650 \leq \overline{x} \leq 2950) &= P(-1.67 \leq Z \leq 1.67) \\
&= P(Z \leq 1.67) - P(Z \leq -1.67) \\
&= P(Z \leq 1.67) - \Big[1 - P(Z \leq 1.67)\Big] \\
&= 2P(Z \leq 1.67) - 1 \\
&= 2\Phi(1.67) - 1 \\
&= 2 \times 0.9525 - 1 \\
&= 0.9050
\end{aligned}$$

Donc $P(|\overline{x} - \mu| > 150) = 1 - 0.9050 = 0.0950$ soit $9.5\,\%$.

Exercice 4

Une usine produit des pièces dont le poids suit une loi normale de moyenne $\mu = 250$ g et d'écart-type $\sigma = 15$ g. Un contrôleur prélève un échantillon de $n = 16$ pièces.

1) Quelle est la distribution exacte de $\overline{x}$?

2) Calculez $P(\overline{x} < 245)$.

Solution 4

1) Distribution exacte de $\overline{x}$:

Comme la population des pièces suit un loi normale d'espérance $\mu = 250$ et de variance $\sigma^2 = 15^2 = 225$, alors $\overline{x}$ suit également et exactement une loi normale d'espérance $E(\overline{x}) = \mu$ et de variance $\sigma^2_{\overline{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$:

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}\left(\mu\,,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Ici :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}\left(250\,,\ \frac{15^2}{16}\right)$$

L'erreur type de $\overline{x}$ est donc :

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\sigma^2_{\overline{x}}} = \sqrt{\frac{15^2}{16}} = 3.75 \text{ g}$$

2) Calcul de $P(\overline{x} < 245)$:

$$\begin{aligned} P(\overline{x} < 245) &= P\left(\frac{\overline{x} - 250}{3.75} < \frac{245 - 250}{3.75}\right) \\ &= P(Z < -1.33) \\ &= \Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33) \\ &= 1 - 0.9082 = 0.0918 = 9.18\% \end{aligned}$$

Exercice 5

On étudie le temps de traitement des dossiers dans une administration. La population a $\mu = 12$ jours et $\sigma = 3$ jours. On prélève un échantillon de $n = 36$ dossiers.

1) Calculez l'erreur type de $\overline{x}$.

2) Quelle est la probabilité que $\overline{x}$ soit compris entre 11 et 13 jours ? (on vous donne $\Phi(2) = 0.9772$)

3) Interprétez ce résultat pour un responsable qui souhaite que le délai moyen estimé soit précis.

Solution 5

1) Erreur type de $\overline{x}$:
On suppose que la population des dossiers est de taille N infinie ou au moins égale à 720. Dans ce cas, le facteur de correction pour population de taille finie est négligeable et on peut calculer l'erreur type de $\overline{x}$ selon la formule suivante :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = 0.5 \text{ jour}$$

2) Probabilité que $\overline{x}$ soit compris entre 11 et 13 jours :
Puisque $n = 36 \geq 30$, alors par application du théorème central limite, la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est approximativement normale d'espérance $E(\overline{x}) = \mu = 12$ et de variance $\sigma^2_{\overline{x}} = 0.25$, c'est à dire :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(12\,,\,0.25)$$

La probabilité que $\overline{x}$ soit compris entre 11 et 13 jours s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(11 \leq \overline{x} \leq 13) &= P\left(\frac{11 - 12}{0.5} \leq \frac{\overline{x} - 12}{0.5} \leq \frac{13 - 12}{0.5}\right) \\ &= P\left(-2 \leq Z \leq 2\right) \\ &= P\left(Z \leq 2\right) - P\left(Z \leq -2\right) \\ &= \Phi\left(2\right) - \Phi\left(-2\right) \\ &= \Phi\left(2\right) - \left[1 - \Phi\left(2\right)\right] \\ &= 2\Phi\left(2\right) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544 = 95.44\% \end{aligned}$$

3) Interprétation :
Avec un échantillon de taille $n = 36$, il y a plus de 95 % de chances que l'estimation $\overline{x}$ ne s'écarte pas de plus d'un jour de la vraie moyenne $\mu = 12$. Cela justifie un échantillon de cette taille pour une précision acceptable.

Exercice 6

Vrai ou Faux ? Justifiez.

1) L'erreur type de $\overline{x}$ diminue lorsque la taille d'échantillon augmente.
2) Si $n \geq 30$, la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est toujours exactement normale.
3) Pour une population finie avec $n/N = 0.10$, on peut ignorer le facteur de correction.
4) $E(\overline{x}) = \mu$ quelle que soit la taille de l'échantillon.

Solution 6

1) **Vrai** car :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Lorsque n augmente, $\sigma_{\overline{x}}$ diminue (précision accrue).

2) **Faux** car le Théorème Central Limite donne une *approximation* normale pour $n \geq 30$. L'exactitude n'est garantie que si la population est normale.

3) **Faux** car la règle pratique est :

$$\frac{n}{N} \leq 0.05$$

Ici $0.10 > 0.05$, il faut donc utiliser le facteur de correction $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

4) **Vrai**. C'est la propriété d'absence de biais de $\overline{x}$, valable pour tout $n \geq 1$ avec échantillonnage aléatoire simple.

Exercice 7

Une banque souhaite estimer le montant moyen des crédits immobiliers. La population a $\mu = 180000$ € et $\sigma = 45000$ €. On prélève un échantillon de $n = 50$ dossiers.

1) Calculez l'erreur type de $\overline{x}$.
2) Quelle est la probabilité que $\overline{x}$ surestime μ de plus de 10000 € ? (on vous donne $\Phi(1.57) = 0.9418$)
3) Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour que cette probabilité soit inférieure à 5% ?

Solution 7

1) Erreur type de $\overline{x}$:
On suppose que la population des crédits immobiliers est de taille N infinie ou qu'elle est au moins égale à 1000. Ainsi :

$$\frac{n}{N} = \frac{50}{1000} = 0.05 \leq 0.05$$

Dans ces conditions, le facteur de correction pour taille de population finie est négligeable et l'erreur type de $\overline{x}$ est obtenue comme suit :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{45000}{\sqrt{50}} \approx 6365€$$

2) Probabilité que $\overline{x}$ surestime μ de plus de 10000 € :

$$P(\overline{x} > \mu + 1000) = P(\overline{x} > 190000)$$

Comme $n = 50 \geq 30$ et en application du Théorème Central Limite, la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est approximativement normale d'espérance $E(\overline{x}) = \mu = 180000$ et de variance $\sigma^2_{\overline{x}} = 6365^2$:

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(180000\,,\,6365^2)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(\overline{x} > 190000) &= P\left(\frac{\overline{x} - 180000}{6365} > \frac{190000 - 180000}{6365}\right) \\
&= P\left(Z > 1.57\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq 1.57\right) \\
&= 1 - \Phi\left(1.57\right) \\
&= 1 - 0.9418 = 0.0582 = 5.82\%
\end{aligned}$$

3) Taille d'échantillon pour que cette probabilité soit inférieure à 5% :

$$\begin{aligned}
P(\overline{x} > 190000) &< 0.05 \\
P\left(\frac{\overline{x} - E(\overline{x})}{\sigma/n} > \frac{190000 - E(\overline{x})}{\sigma/n}\right) &< 0.05 \\
P\left(Z > \frac{10000}{45000/\sqrt{n}}\right) &< 0.05 \\
1 - P\left(Z \leq \frac{10000}{45000/\sqrt{n}}\right) &< 0.05 \\
1 - 0.05 &< P\left(Z \leq \frac{10000}{45000/\sqrt{n}}\right) \\
\Phi(1.645) &< \Phi\left(\frac{10000}{45000/\sqrt{n}}\right) \\
1.645 &< \frac{10000}{45000/\sqrt{n}} \\
\sqrt{n} &> \frac{1.645 \times 45000}{10000} \\
\sqrt{n} &> 7.4025 \\
n &> 54.8
\end{aligned}$$

Il faut donc $n \geq 55$.

Exercice 8

Un fabricant de pneus affirme que la durée de vie moyenne de ses nouveaux pneus est $\mu = 40000$ km avec $\sigma = 3000$ km. Un test sur un échantillon de $n = 36$ pneus donne $\overline{x} = 39200$ km.

1) Sous l'hypothèse que l'affirmation du fabricant est vraie, quelle est la distribution de $\overline{x}$?

2) Calculez la probabilité d'observer $\overline{x} \leq 39200$ km.

3) Que pouvez-vous conclure sur la véracité de l'affirmation ?

Solution 8

1) Sous l'hypothèse que l'affirmation du fabricant est vraie, et puisque la taille d'échantillon vérifie $n = 36 \geq 30$, la distribution échantillonnage de $\overline{x}$ est approximativement normale selon le Théorème Central Limite :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}\left(E(\overline{x})\,,\,\sigma_{\overline{x}}^2\right)$$

Avec :

$$E(\overline{x}) = \mu = 40000 \text{ km} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3000}{\sqrt{36}} = 500 \text{ km}$$

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}\left(40000\,,\,500^2\right)$$

2) Probabilité d'observer $\overline{x} \leq 39200$ km :

$$\begin{aligned} P(\overline{x} \leq 39200) &= P\left(\frac{\overline{x} - 40000}{500} \leq \frac{39200 - 40000}{500}\right) \\ &= P(Z \leq -1.60) \\ &= \Phi(-1.60) \\ &= 1 - \Phi(1.60) \\ &= 1 - 9452 \\ &= 0.0548 = 5.48\% \end{aligned}$$

3) Cette probabilité est faible (mais pas exceptionnelle). On ne peut pas rejeter formellement l'affirmation au seuil de 5 %, mais le résultat incite à la prudence : un échantillon plus grand ou un intervalle de confiance serait nécessaire pour trancher.

Exercice 9

Une population finie de $N = 500$ entreprises a un chiffre d'affaires moyen $\mu = 2$ M€ et $\sigma = 0.8$ M€. On prélève un échantillon de $n = 50$ entreprises.

1) Faut-il utiliser le facteur de correction pour population finie ? Justifiez.

2) Calculez l'erreur type de $\overline{x}$ avec et sans ce facteur.

3) Quelle est l'erreur relative commise en l'ignorant ?

Solution 9

1) **Oui**, il faut utiliser le facteur de correction, puisque :

$$\frac{n}{N} = \frac{50}{500} = 0.10 > 0.05$$

2) Erreur type de $\overline{x}$ sans facteur :

$$\sigma_{\overline{x}}^{\text{inf}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{50}} \approx 0.1132 \text{ M€}$$

Erreur type de $\overline{x}$ avec facteur :

$$\begin{aligned} \sigma_{\overline{x}}^{\text{fin}} &= \sigma_{\overline{x}}^{\text{inf}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \\ &= 0.1132 \times \sqrt{\frac{450}{499}} \\ &\approx 0.1132 \times 0.9487 \approx 0.1074 \text{ M€} \end{aligned}$$

3) Erreur relative commise en ignorant le facteur de correction pour population finie :

$$\frac{0.1132 - 0.1074}{0.1074} \approx 5.4\,\%$$

Ignorer le facteur surestime l'erreur type de plus de 5 %, ce qui peut conduire à des intervalles de confiance trop larges.

Exercice 10

Le salaire horaire moyen dans un secteur est $\mu = 18$ € avec $\sigma = 4$ €. On prélève deux échantillons indépendants : $n_1 = 25$ et $n_2 = 100$.

1) Calculez l'erreur type de $\overline{x}$ pour chaque échantillon.

2) Comparez les probabilités que $\overline{x}$ s'écarte de plus de ± 1 € de μ pour les deux tailles. (on vous donne $\Phi(1.25) = 0.8944$ et $\Phi(2.5) = 0.9938$)

3) Que concluez-vous sur l'effet de la taille d'échantillon sur la précision ?

Solution 10

1) Pour $n_1 = 25$:

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0.80 \text{ €}$$

Pour $n_2 = 100$:

$$\sigma_{\bar{x}_2} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0.40 \text{ €}$$

2) Pour $n_1 = 25$:

$$\begin{aligned}
P(|\overline{x} - \mu| > 1) &= 1 - P(|\overline{x} - \mu| \leq 1) \\
&= 1 - P(-1 \leq \overline{x} - \mu \leq 1) \\
&= 1 - P(-1 + \mu \leq \overline{x} \leq 1 + \mu) \\
&= 1 - P(17 \leq \overline{x} \leq 19) \\
&= 1 - P\left(\frac{17 - 18}{0.80} \leq \frac{\overline{x} - 18}{0.80} \leq \frac{19 - 18}{0.80}\right) \\
&= 1 - P\left(-1.25 \leq Z \leq 1.25\right) \\
&= 1 - [P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -1.25)] \\
&= 1 - [\Phi(1.25) - \Phi(-1.25)] \\
&= 1 - [\Phi(1.25) - (1 - \Phi(1.25))] \\
&= 2 - 2\Phi(1.25) \\
&= 2 - 2 \times 0.8944 = 0.2112
\end{aligned}$$

Pour $n_2 = 100$:

$$\begin{aligned}
P(|\overline{x} - \mu| > 1) &= 1 - P(|\overline{x} - \mu| \leq 1) \\
&= 1 - P(-1 \leq \overline{x} - \mu \leq 1) \\
&= 1 - P(-1 + \mu \leq \overline{x} \leq 1 + \mu) \\
&= 1 - P(17 \leq \overline{x} \leq 19) \\
&= 1 - P\left(\frac{17 - 18}{0.40} \leq \frac{\overline{x} - 18}{0.40} \leq \frac{19 - 18}{0.40}\right) \\
&= 1 - P\left(-2.5 \leq Z \leq 2.5\right) \\
&= 1 - [P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -2.5)] \\
&= 1 - [\Phi(2.5) - \Phi(-2.5)] \\
&= 1 - [\Phi(2.5) - (1 - \Phi(2.5))] \\
&= 2 - 2\Phi(2.5) \\
&= 2 - 2 \times 0.9938 = 0.0124
\end{aligned}$$

La probabilité d'erreur importante passe de 21.12 % à 1.24 % quand on quadruple la taille d'échantillon.

3) Augmenter n réduit l'erreur type proportionnellement à $1/\sqrt{n}$, ce qui améliore fortement la précision. Cependant, les gains sont décroissants : passer de 25 à 100 divise l'erreur type par 2, mais il faudrait $n = 400$ pour la diviser encore par 2.

Exercice 11

Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(100, 15^2)$. On prélève un échantillon de taille n.

1) Pour $n = 9$, calculez $P(95 \leq \overline{x} \leq 105)$.

2) Pour quelle valeur minimale de n a-t-on $P(98 \leq \overline{x} \leq 102) \geq 0.95$?

Solution 11

1) Calcul de $P(95 \leq \overline{x} \leq 105)$:

Puisque la population est distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(100, 15^2)$, alors tout échantillon de cette population est également distribué selon une loi normale, et la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est aussi normale $\mathcal{N}(E(\overline{x}), \sigma_{\overline{x}}^2)$ avec :

$$\begin{aligned}
E(\overline{x}) &= \mu = 100 \\
\sigma_{\overline{x}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(100, 5^2)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
P(95 \leq \overline{x} \leq 105) &= P\left(\frac{95-100}{5} \leq \frac{\overline{x}-100}{5} \leq \frac{105-100}{5}\right) \\
&= P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1-\Phi(1)] \\
&= 2\Phi(1) - 1 \\
&= 2 \times 0.8413 - 1 \\
&= 0.6826
\end{aligned}$$

2) La valeur minimale de n qui vérifie $P(98 \leq \overline{x} \leq 102) \geq 0.95$:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{98-100}{15/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{102-100}{15/\sqrt{n}}\right) &\geq 0.95 \\
P\left(-\frac{2\sqrt{n}}{15} \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{15}\right) &\geq 0.95 \\
P\left(Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{15}\right) - P\left(Z \leq -\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) &\geq 0.95 \\
\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) &\geq 0.95 \\
\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{15}\right)\right] &\geq 0.95 \\
2\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) - 1 &\geq 0.95 \\
\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) &\geq 0.975 \\
\Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{15}\right) &\geq \Phi(1.96) \\
\frac{2\sqrt{n}}{15} &\geq 1.96 \\
\sqrt{n} &\geq \frac{1.96 \times 15}{2} = 14.7
\end{aligned}$$

Ainsi $n \geq 216.09 \Rightarrow n_{\min} = 217$.

Exercice 12

Un économiste étudie la productivité du travail. La population a $\mu = 50$ unités/heure et $\sigma = 10$ unités/heure. Il prélève un échantillon de $n = 64$ travailleurs.

1) Quelle est la probabilité que $\overline{x}$ soit supérieur à 52 unités/heure ?

2) Si l'économiste observe $\overline{x} = 52.5$, peut-il conclure que la productivité a augmenté ?

Solution 12

1) Probabilité que $\overline{x}$ soit supérieur à 52 unités/heure :

L'échantillonne étant de taille $n = 64$ supérieure a 30, le Théorème Central Limite nous permet d'approcher la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ par une loi normale :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(E(\overline{x}), \sigma^2_{\overline{x}})$$

avec :

$$E(\overline{x}) = \mu = 50$$

On suppose que la population des travailleurs est de taille N infinie ou au moins égale a 1280. Dans ce cas, on a :

$$\frac{n}{N} = \frac{64}{1200} \leq 0.05$$

De cette manière, l'erreur type de $\overline{x}$ est calculée sans utiliser le facteur de correction pour population de taille finie comme suit :

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{64}} = 1.25$$

Finalement, la distribution d'échantillonnage de $\overline{x}$ est :

$$\overline{x} \sim \mathcal{N}(50, 1.25)$$

Calculons a présent la probabilité que $\overline{x}$ soit supérieur à 52 unités/heure :

$$\begin{aligned}
P(\overline{x} > 52) &= 1 - P(\overline{x} \leq 52) \\
&= 1 - P\left(\frac{\overline{x} - 50}{1.25} \leq \frac{52 - 50}{1.25}\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq 1.6\right) \\
&= 1 - \Phi(Z \leq 1.6) \\
&= 1 - 0.9452 \\
&= 0.0548 = 5.48\%
\end{aligned}$$

2) Pour $\overline{x} = 52.5$:

$$\begin{aligned}
P(\overline{x} \geq 52.5) &= P\left(\frac{\overline{x} - 50}{1.25} \geq \frac{52.5 - 50}{1.25}\right) \\
&= P(Z \geq 2) \\
&= 1 - P(Z < 2) \\
&= 1 - \Phi(2) \\
&= 1 - 0.9772 = 0.0228 = 2.28\%
\end{aligned}$$

Cette probabilité est faible : si μ était toujours 50, observer une telle moyenne serait rare. Cela suggère une augmentation, mais un test d'hypothèse formel (avec seuil de significativité) serait nécessaire pour conclure statistiquement.

— D'autres exercices sont en cours de préparation —